APOSTILA

CURSO PREPARATÓRIO

INTENSIVO

enem

EXAME NACIONAL DO ENSINO MÉDIO

Foco

Cursos Preparatórios

A direção certa para o seu sucesso!

eutenhofoco.com.br

Prof. RAFAEL BIASI

DESDE 2011
Transformando sonhos
em realidade!

MATEMÁTICA 05

ANÁLISE COMBINATÓRIA

A Análise Combinatória é a parte da Matemática que se preocupa em contar as possibilidades. Alguns problemas, bem simples, podem ser resolvidos enumerando todas as possibilidades, por exemplo: Quantos são os números ímpares entre 10 e 20?

Em outras situações, entretanto, a enumeração torna-se muito trabalhosa. Nesses casos, é necessária a utilização de algumas técnicas de contagem, por exemplo: Quantas são as placas de carros que podem ser formadas com 3 letras e 4 algarismos?

PRINCÍPIO FUNDAMENTAL DA CONTAGEM

Mas, como contar, sem contar? Se dispomos de 3 bermudas e 2 camisas, todas distintas, de quantas formas podemos vesti-las para sair?

Nesse exemplo simples, aplicamos o Princípio Fundamental da Contagem (P.F.C.), que podemos enunciar assim "se um determinado evento pode ocorrer de x maneiras, e um outro evento pode ocorrer de y maneiras (independentemente do resultado do primeiro evento), então os dois juntos podem ocorrer de $x \cdot y$ maneiras". Esse princípio multiplicativo pode ser estendido para três ou mais eventos independentes.

Exemplo 1. Quantos são os resultados possíveis para o lançamento de uma moeda duas vezes?

Exemplo 2. Quantos são os números inteiros positivos de cinco algarismos que não têm algarismos consecutivos iguais?

Exemplo 3. Os números de telefones da Região Metropolitana de Itaqui têm sete algarismos, cujo primeiro dígito é 3. Qual o número máximo de telefones que podem ser instalados?

NOTAÇÃO FATORIAL

No estudo de problemas de Análise Combinatória, frequentemente nos deparamos com produtos em que os termos são números naturais consecutivos. Para facilitar a representação desses produtos, foi criada a notação fatorial, representada pelo ponto de exclamação (!). Assim, define-se $\mathbf{1}! = \mathbf{1}$, $\mathbf{0}! = \mathbf{1}$ e:

$$\boldsymbol{n}! = \boldsymbol{n} \cdot (\boldsymbol{n} - \mathbf{1}) \cdot (\boldsymbol{n} - \mathbf{2}) \cdots \mathbf{3} \cdot \mathbf{2} \cdot \mathbf{1}$$

Resolva alguns exemplos.

$5! =$ $\quad$ $4! =$ $\quad$ $3! =$

$7! =$ $\quad$ $8! =$ $\quad$ $2! =$

$$\frac{6!}{5! \cdot 3!} =$$

$$\frac{4! \cdot 9!}{10! \cdot 7!} =$$

PERMUTAÇÃO SIMPLES

$$\boldsymbol{P_n} = \boldsymbol{n}!$$

Exemplo 4. Determine a quantidade de anagramas das palavras: GURIA; PENDURICALHO; TRIPLO; e ESTUDAR.

PERMUTAÇÃO COM REPETIÇÃO

$$\boldsymbol{P_n^{a,b,\cdots,k}} = \frac{\boldsymbol{n}!}{\boldsymbol{a}! \cdot \boldsymbol{b}! \cdots \boldsymbol{k}!}$$

Exemplo 5. Quantos anagramas as palavras TABUADA, MATEMÁTICA, PESSOALMENTE e NATAL possuem, respectivamente?

ARRANJO SIMPLES

$$A_{n,p} = \frac{n!}{(n-p)!}$$

Exemplo 6. Quantos números de 3 algarismos podemos formar com 1, 2, 3, 4, 5 e 6?

Pega essa dica!

$A_{10,4} =$

$A_{7,3} =$

$A_{9,2} =$

$A_{12,4} =$

COMBINAÇÃO SIMPLES

$$C_{n,p} = \frac{n!}{p! \cdot (n-p)!}$$

Exemplo 7. Quantas duplas podemos formar com os alunos Esveraldo, Irineia e Juarnaldo?

Pega essa dica!

$C_{9,2} =$

$C_{8,2} =$

$C_{7,4} =$

$C_{11,3} =$

EXERCÍCIOS DE AULA

01. (ENEM-2014) Um procedimento padrão para aumentar a capacidade do número de senhas de banco é acrescentar mais caracteres a essa senha. Essa prática, além de aumentar as possibilidades de senha, gera um aumento na segurança. Deseja-se colocar dois novos caracteres na senha de um banco, um no início e outro no final. Decidiu-se que esses novos caracteres devem ser vogais e o sistema conseguirá diferenciar maiúsculas de minúsculas. Com essa prática, o número de senhas possíveis ficará multiplicado por:

(A) 100
(B) 90
(C) 80
(D) 25
(E) 20

02. (ENEM-2009) Doze times se inscreveram em um torneio de futebol amador. O jogo de abertura do torneio foi escolhido da seguinte forma: primeiro, foram sorteados 4 times para compor o Grupo A. Em seguida, entre os times do Grupo A, foram sorteados 2 times para realizar o jogo de abertura do torneio, sendo que o primeiro deles jogaria em seu próprio campo, e o segundo seria o time visitante. A quantidade total de escolhas possíveis para do Grupo A e a quantidade total de escolhas dos times do jogo de abertura podem ser calculadas através de:

(A) uma combinação e um arranjo, respectivamente.
(B) um arranjo e uma combinação, respectivamente.
(C) um arranjo e uma permutação, respectivamente.
(D) duas combinações.
(E) dois arranjos.

03. (ENEM-2018) O Salão do Automóvel de São Paulo é um evento no qual vários fabricantes expõem seus modelos mais recentes de veículos, mostrando, principalmente, suas inovações em *design* e tecnologia. Uma montadora pretende participar desse evento com dois estandes, um na entrada e outra na região central do salão, expondo, em cada um deles, um carro compacto e uma caminhonete. Para compor os estandes, foram disponibilizados pela montadora quatro carros compactos, de modelos distintos, e seis caminhonetes de diferentes cores para serem escolhidos aqueles que serão expostos. A posição dos carros dentro de cada estande é irrelevante. Uma expressão que fornece a quantidade de maneiras diferentes que os estandes podem ser compostos é:

(A) A_{10}^{4}
(B) C_{10}^{4}
(C) $C_4^2 \times C_6^2 \times 2 \times 2$
(D) $A_4^2 \times A_6^2 \times 2 \times 2$
(E) $C_4^2 \times C_6^2$

04. (ENEM-2019) Durante suas férias, oito amigos, dos quais dois são canhotos, decidem realizar um torneio de vôlei na praia. Eles precisam formar quatro duplas para a realização do torneio. Nenhuma dupla pode ser formada por dois jogadores canhotos. De quantas maneiras diferentes podem ser formadas essas quatro duplas?

(A) 69
(B) 70
(C) 90
(D) 104
(E) 105

GABARITO

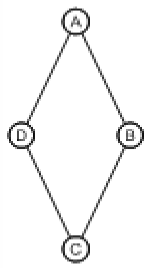
01 -	02 -	03 -	04 -

EXERCÍCIOS DE REVISÃO

01. (ENEM-2013) Um banco solicitou aos seus clientes a criação de uma senha pessoal de seis dígitos, formada somente por algarismos de 0 a 9, para acesso à conta corrente pela internet. Entretanto, um especialista em sistemas de segurança eletrônica recomendou à direção do banco cadastrar seus usuários, solicitando, para cada um deles, a criação de uma nova senha com seis dígitos, permitindo agora o uso das 26 letras do alfabeto, além dos algarismos de 0 a 9. Nesse novo sistema, cada letra maiúscula era considerada distinta de sua versão minúscula. Além disso, era proibido o uso de outros tipos de caracteres. Uma forma de avaliar uma alteração no sistema de senhas é a verificação do coeficiente de melhora, que é a razão do novo número de possibilidades de senhas em relação ao antigo. O coeficiente de melhora da alteração recomendada é:

(A) $\frac{62^6}{10^6}$
(B) $\frac{62!}{10!}$
(C) $\frac{62! \cdot 4!}{10! \cdot 56!}$
(D) $62! - 10!$
(E) $62^6 - 10^6$

02. (ENEM-2013) Um artesão de joias tem a sua disposição pedras brasileiras de três cores: vermelhas, azuis e verdes. Ele pretende produzir joia constituídas por uma liga metálica, a partir de um molde no formado de losango não quadrado com pedras nos seus vértices, de modo que dois vértices consecutivos tenham sempre pedras de cores diferentes. A figura ilustra uma joia, produzida por esse artesão, cujos vértices A, B, C e D correspondem às posições ocupadas pelas pedras.



Com base nas informações fornecidas, quantas joias diferentes, nesse formato, o artesão poderá obter?
(A) 6
(B) 12
(C) 18
(D) 24
(E) 36

03. (ENEM-2014) Um cliente de uma vídeolocadora tem o hábito de alugar dois filmes por vez. Quando os devolve, sempre pega outros dois filmes e assim sucessivamente. Ele soube que a videolocadora recebeu alguns lançamentos, sendo 8 filmes de ação, 5 de comédia e 3 de drama e, por isso, estabeleceu uma estratégia para ver todos esses 16 lançamentos. Inicialmente alugará, em cada vez, um filme de ação e um de comédia. Quando se esgotarem as possibilidades de comédia, o cliente alugará um filme de ação e um de drama, até que todos os lançamentos sejam vistos e sem que nenhum filme seja repetido. De quantas formas distintas a estratégia desse cliente poderá ser posta em prática?
(A) $20 \cdot 8! + (3!)^2$
(B) $8! \cdot 5! \cdot 3!$
(C) $\frac{8! \cdot 5! \cdot 3!}{2^8}$
(D) $\frac{8! \cdot 5! \cdot 3!}{2^2}$
(E) $\frac{16!}{2^8}$

04. (ENEM-2017) Uma empresa construirá sua página na internet e espera atrair um público de aproximadamente um milhão de clientes. Para acessar essa página, será necessária uma senha com formato a ser definido pela empresa. Existem cinco opções de formato oferecidas pelo programador, descritas no quadro, em que “L” e “D” representam, respectivamente, letra maiúscula e dígito.

Opção	Formato
I	LDDDDD
II	DDDDDD
III	LLDDDD
IV	DDDDD
V	LLLDD

As letras do alfabeto, entre as 26 possíveis, bem como os dígitos, entre os 10 possíveis, podem se repetir em qualquer das opções. A empresa quer escolher uma opção de formato cujo número de senhas distintas possíveis seja superior ao número esperado de clientes, mas que esse número não seja superior ao dobro do número esperado de clientes. A opção que mais se adequa às condições da empresa é:

(A) I
(B) II
(C) III
(D) IV
(E) V

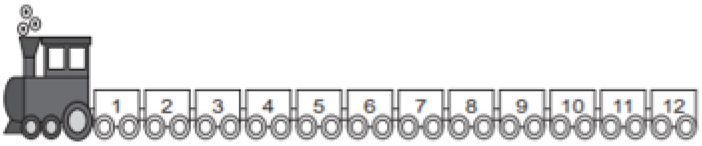
05. (ENEM-2017) O comitê organizador da Copa do Mundo 2014 criou a logomarca da Copa, composta de uma figura plana e o slogan “Juntos num só ritmo”, com mãos que se unem formando a taça Fifa. Considere que o comitê organizador resolvesse utilizar todas as cores da bandeira nacional (verde, amarelo, azul e branco) para colorir a logomarca, de forma que regiões vizinhas tenham cores diferentes.

JUNTOS NUM SÓ RITMO

De quantas maneiras diferentes o comitê organizador da Copa poderia pintar a logomarca com as cores citadas?

(A) 15
(B) 30
(C) 108
(D) 360
(E) 972

06. (ENEM-2019) Uma empresa confecciona e comercializa um brinquedo formado por uma locomotiva, pintada na cor preta, mais 12 vagões de iguais formato e tamanho, numerados de 1 a 12. Dos 12 vagões, 4 são pintados na cor vermelha, 3 na cor azul, 3 na cor verde e 2 na cor amarela. O trem é montado utilizando-se uma locomotiva e 12 vagões, ordenados crescentemente segundo suas numerações, conforme ilustrado na figura.



De acordo com as possíveis variações nas colorações dos vagões, a quantidade de trens que podem ser montados, expressa por meio de combinações, é dada por:

(A) $C_{12}^{4} \times C_{12}^{3} \times C_{12}^{3} \times C_{12}^{2}$

(B) $C_{12}^{4} + C_{8}^{3} + C_{5}^{3} + C_{2}^{2}$

(C) $C_{12}^{4} \times 2 \times C_{8}^{3} \times C_{5}^{2}$

(D) $C_{12}^{4} + 2 \times C_{12}^{3} + C_{12}^{2}$

(E) $C_{12}^{4} \times C_{8}^{3} \times C_{5}^{3} \times C_{2}^{2}$

07. (ENEM-2012) O diretor de uma escola convidou os 280 alunos de terceiro ano a participarem de uma brincadeira. Suponha que existem 5 objetos e 6 personagens numa casa de 9 cômodos: um dos personagens esconde um dos objetos em um dos cômodos da casa. O objetivo da brincadeira é adivinhar qual objeto foi escondido por qual personagem e em qual cômodo da casa o objeto foi escondido. Todos os alunos decidiram participar. A cada vez um aluno é sorteado e dá a sua resposta. As respostas devem ser sempre distintas das anteriores, e um mesmo aluno não pode ser sorteado mais de uma vez. Se a resposta do aluno estiver correta, ele é declarado vencedor e a brincadeira é encerrada. O diretor sabe que algum aluno acertará a resposta porque há:

(A) 10 alunos a mais do que possíveis respostas distintas.

(B) 20 alunos a mais do que possíveis respostas distintas.

(C) 119 alunos a mais do que possíveis respostas distintas.

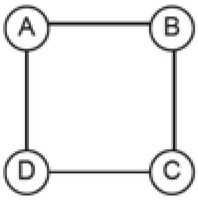
(D) 260 alunos a mais do que possíveis respostas distintas.

(E) 270 alunos a mais do que possíveis respostas distintas.

08. (ENEM-2017) Desde 1999 houve uma significativa mudança nas placas dos carros particulares em todo o Brasil. As placas, que antes eram formadas apenas por seis caracteres alfanuméricos, foram acrescidas de uma letra, passando a ser formadas por sete caracteres, sendo que os três primeiros caracteres devem ser letras (dentre as 26 letras do alfabeto) e os quatro últimos devem ser algarismos (de 0 a 9). Essa mudança possibilitou a criação de um cadastro nacional unificado de todos os veículos licenciados e ainda aumentou significativamente a quantidade de combinações possíveis de placas. Não são utilizadas placas em que todos os algarismos sejam iguais a zero. Nessas condições, a quantidade de placas que podem ser utilizadas é igual a:

(A) $26^3 + 9^4$
(B) $26^3 \text{ x } 9^4$
(C) $26^3(10^4 - 1)$
(D) $(26^3 + 10^4) - 1$
(E) $(26^3 \text{ x } 10^4) - 1$

09. (ENEM-2016) Para estimular o raciocínio de sua filha, um pai fez o seguinte desenho e o entregou à criança juntamente com três lápis de cores diferentes.



Ele deseja que a menina pinte somente os círculos, de modo que aqueles que estejam ligados por um segmento tenham cores diferentes. De quantas maneiras diferentes a criança pode fazer o que o pai pediu?

(A) 6
(B) 12
(C) 18
(D) 24
(E) 72

10. (ENEM-2016) O tênis é um esporte em que a estratégia de jogo a ser adotada depende, entre outros fatores, de o adversário ser canhoto ou destro. Um clube tem um grupo de 10 tenistas, sendo que 4 são canhotos e 6 são destros. O técnico do clube deseja realizar uma partida de exibição entre dois desses jogadores, porém, não poderão ser ambos canhotos. Qual o número de possibilidades de escolha dos tenistas para a partida de exibição?

(A) $\frac{10!}{2! \times 8!} - \frac{4!}{2! \times 2!}$
(B) $\frac{10!}{8!} - \frac{4!}{2!}$
(C) $\frac{10!}{2! \times 8!} - 2$
(D) $\frac{6!}{4!} + 4 \times 4$
(E) $\frac{6!}{4!} + 6 \times 4$

11. (ENEM-2016) Para cadastrar-se em um site, uma pessoa precisa escolher uma senha composta por quatro caracteres, sendo dois algarismos e duas letras (maiúsculas ou minúsculas). As letras e os algarismos podem estar em qualquer posição. Essa pessoa sabe que o alfabeto é composto por vinte e seis letras e que uma letra maiúscula difere da minúscula em uma senha. O número total de senhas possíveis para o cadastramento nesse site é dado por:

(A) $10^2 \cdot 26^2$

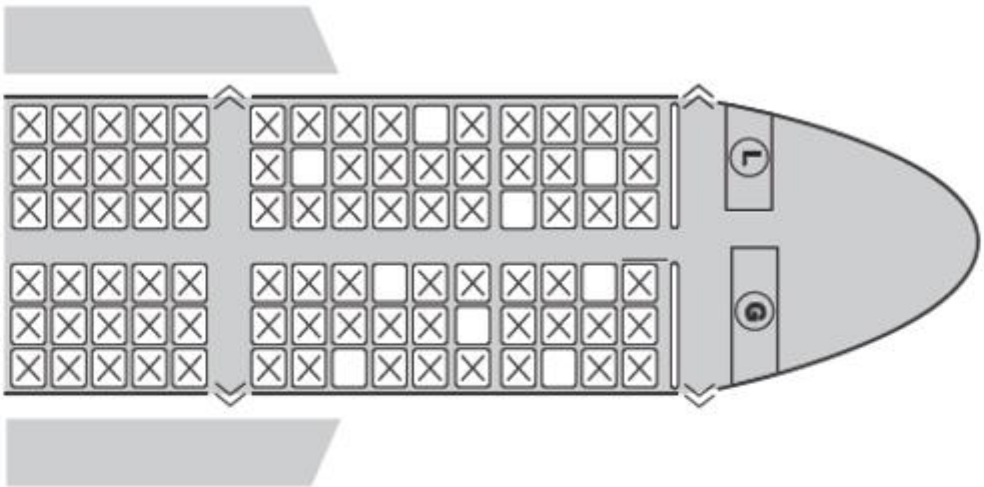
(B) $10^2 \cdot 52^2$

(C) $10^2 \cdot 52^2 \cdot \frac{4!}{2!}$

(D) $10^2 \cdot 26^2 \cdot \frac{4!}{2! \cdot 2!}$

(E) $10^2 \cdot 52^2 \cdot \frac{4!}{2! \cdot 2!}$

12. (ENEM-2015) Uma família composta por sete pessoas adultas, após decidir o itinerário de sua viagem, consultou o site de uma empresa aérea e constatou que o voo para a data escolhida estava quase lotado. Na figura, disponibilizada pelo site, as poltronas ocupadas estão marcadas com X e as únicas poltronas disponíveis são as mostradas em branco.



O número de formas distintas de se acomodar a família nesse voo é calculado por:

(A) $\frac{9!}{2!}$

(B) $\frac{9!}{7! \times 2!}$

(C) $7!$

(D) $\frac{5!}{2!} \times 4!$

(E) $\frac{5!}{4!} \times \frac{4!}{3!}$

GABARITO:

01 - A	02 - B	03 - B	04 - E	05 - E	06 - E
07 - A	08 - C	09 - C	10 - A	11 - E	12 - A