

APOSTILA

CURSO PREPARATÓRIO



eutenhofoco.com.br



Prof.º RAFAEL BIASI

 professor_rafabiasi

DESDE 2011
Transformando sonhos
em realidade!



MATEMÁTICA

04

SEQUÊNCIAS NUMÉRICAS

Sequência numérica é um grupo de números dispostos em uma ordem definida. Por exemplo, podemos considerar a sequência dos números naturais ímpares, dada por $(1, 3, 5, 7, 9, \dots)$. Observe que o exemplo citado se refere a uma sequência infinita. Já o conjunto dos números primos naturais e menores do que 10 é dado por $(2, 3, 5, 7)$, ou seja, é um exemplo de uma sequência finita. Assim, uma sequência infinita pode ser representada da seguinte forma:

$$(a_1, a_2, a_3, \dots, a_{n-1}, a_n, \dots)$$

- a_1 indica o elemento da posição **1**;
- a_2 indica o elemento da posição **2**;
- a_3 indica o elemento da posição **3**;
- \vdots
- a_n indica o elemento da posição **n**.

Uma sequência numérica pode ser definida por uma fórmula ou lei de formação. Veja os exemplos:

Exemplo 1. Escrever os seis primeiros termos da sequência definida por $a_n = 3n - 2$.

Exemplo 2. Escrever os sete primeiros termos da sequência numérica definida por:

$$\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_2 = 1 \\ a_n = a_{n-1} + a_{n-2}; n > 2 \end{cases}$$

PROGRESSÃO ARITMÉTICA (PA)

Chamamos de progressão aritmética (PA) a toda sequência na qual cada termo, a partir do segundo, é obtido pela soma do termo anterior com uma constante dada, denominada **razão** da PA e indicada por r . Em outras palavras, é uma sequência em que a **diferença** entre dois termos consecutivos é **sempre constante**. De acordo com a razão é possível classificar uma PA em crescente, decrescente ou constante:

I. Progressão aritmética crescente: $r > 0$.

II. Progressão aritmética decrescente: $r < 0$.

III. Progressão aritmética constante: $r = 0$.

Considere as seguintes progressões aritméticas:

(3, 5, 7, 9, ...) →

(15, 11, 7, ...) →

(2, 2, 2, ...) →

TERMO GERAL DE UMA P.A.

$$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot r$$

Exemplo 1. Determine o trigésimo segundo termo da PA dada por (1, 6, 11, 16, ...).

Exemplo 2. Qual é o milésimo número múltiplo de 10?

PROPRIEDADES

$a_n - a_{n-1} = r$
$(a, b, c) \rightarrow b = \frac{a + c}{2}$
$(a_1, a_2, a_3) \rightarrow (x - r, x, x + r)$

Exemplo 3. O quinto termo da PA (8, x, 4, ...) é:

SOMA DOS TERMOS DE UMA P.A.

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2}$$

Exemplo 4. Calcular a soma dos 10 primeiros termos da PA do Exemplo 3.

EXERCÍCIOS DE AULA

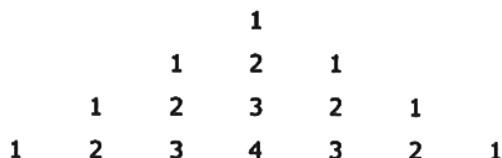
01. (ENEM-2017) Como não são adeptos da prática de esportes, um grupo de amigos resolveu fazer um torneio de futebol utilizando videogame. Decidiram que cada jogador joga uma única vez com cada um dos outros jogadores. O campeão será aquele que conseguir o maior número de pontos. Observaram que o número de partidas depende do número de jogadores, como mostra o quadro:

Quantidade de jogadores	2	3	4	5	6	7
Número de partidas	1	3	6	10	15	21

Se a quantidade de jogadores for 8, quantas partidas serão realizadas?

- (A) 64
- (B) 56
- (C) 49
- (D) 36
- (E) 28

02. (ENEM-2010) Ronaldo é um garoto que adora brincar com números. Numa dessas brincadeiras, empilhou caixas numeradas de acordo com a sequência, conforme mostrada no esquema a seguir:



Ele percebeu que a soma dos números em cada linha tinha uma propriedade e que, por meio dessa propriedade, era possível prever a soma de qualquer linha posterior às já construídas. A partir dessa propriedade, qual será a soma da 9ª linha da sequência de caixas empilhadas por Ronaldo?

- (A) 9
- (B) 45
- (C) 64
- (D) 81
- (E) 285

03. (ENEM-2010) O trabalho em empresas de festas exige dos profissionais conhecimentos de diferentes áreas. Na semana passada, todos os funcionários de uma dessas empresas estavam envolvidos na tarefa de determinar a quantidade de estrelas que seriam utilizadas na confecção de um painel de Natal. Um dos funcionários apresentou um esboço das primeiras cinco linhas do painel, que terá, no total, 150 linhas.



Após avaliar o esboço, cada um dos funcionários esboçou sua resposta:

Funcionário I: aproximadamente 200 estrelas.
Funcionário II: aproximadamente 6.000 estrelas.
Funcionário III: aproximadamente 12.000 estrelas.
Funcionário IV: aproximadamente 22.500 estrelas.
Funcionário V: aproximadamente 22.800 estrelas.

Qual funcionário apresentou um resultado mais próximo da quantidade de estrelas necessárias?

- (A) I
- (B) II
- (C) III
- (D) IV
- (E) V

04. (ENEM-2019) O *slogan* “Se beber não dirija”, muito utilizado em campanhas publicitárias no Brasil, chama a atenção para o grave problema de ingestão de bebida alcoólica por motoristas e suas consequências para o trânsito. A gravidade desse problema pode ser percebida observando como o assunto é tratado pelo Código de Trânsito Brasileiro. Em 2013, a quantidade máxima de álcool permitida no sangue do condutor de um veículo, que já era pequena, foi reduzida, e o valor da multa para motoristas alcoolizados foi aumentado. Em consequência dessas mudanças, observou-se queda no número de acidentes registrados em uma suposta rodovia nos anos que se seguiram às mudanças implantadas em 2013, conforme dados no quadro.

Ano	2013	2014	2015
Número total de acidentes	1 050	900	850

Suponha que a tendência de redução no número de acidentes nessa rodovia para os anos subsequentes seja igual à redução absoluta observada de 2014 para 2015. Com base na situação apresentada, o número de acidentes esperados nessa rodovia em 2018 foi de:

- (A) 150
- (B) 450
- (C) 550
- (D) 700
- (E) 800

GABARITO

1 -	2 -	3 -	4 -
-----	-----	-----	-----

PROGRESSÃO GEOMÉTRICA (PG)

Chamamos de progressão geométrica (PG) a toda sequência na qual cada termo, a partir do segundo, é igual ao produto do termo anterior por uma constante dada, denominada **razão** da PG, e indicada por **q** . Em outras palavras, é uma sequência numérica em que a **divisão** entre dois termos consecutivos é **sempre constante**. De acordo com a razão, é possível classificar a PG em crescente, decrescente, constante ou alternada (oscilante).

- I. Progressão geométrica crescente: $q > 1$.
- II. Progressão geométrica decrescente: $0 < q < 1$.
- III. Progressão geométrica constante: $q = 1$.
- IV. Progressão geométrica alternada: $q < 0$.

Considere as seguintes progressões geométricas:

$$(1, 4, 16, 64, \dots) \rightarrow$$

$$(100, 20, 4, \dots) \rightarrow$$

$$(2, 2, 2, \dots) \rightarrow$$

$$(2, -4, 8, -16, \dots) \rightarrow$$

TERMO GERAL DE UMA P.G.

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$$

Exemplo 1. Determine o sétimo termo da PG definida por $(1, 3, 9, \dots)$.

PROPRIEDADES

$\frac{a_n}{a_{n-1}} = q$
$(a, b, c) \rightarrow b^2 = a \cdot c$
$(a_1, a_2, a_3) \rightarrow \left(\frac{x}{q}, x, xq\right)$

Exemplo 2. Se a sequência $(4, x, 2y, 108)$ é uma PG de razão 3, então $x + y$ é igual a:

SOMA DOS TERMOS DE UMA P.G. FINITA

$$S_n = \frac{a_1 \cdot (q^n - 1)}{q - 1}$$

SOMA DOS TERMOS DE UMA P.G. INFINITA

$$S_\infty = \frac{a_1}{1 - q}$$

Exemplo 3. Calcule a soma dos 9 primeiros termos da PG $(\frac{1}{8}, \frac{1}{2}, 2, \dots)$.

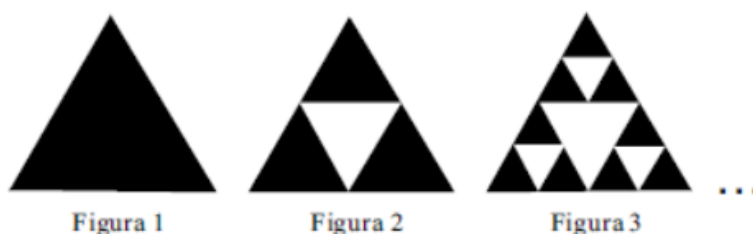
Exemplo 4. Determine a soma dos termos da PG $(3, 1, \frac{1}{3}, \dots)$.

EXERCÍCIOS DE AULA

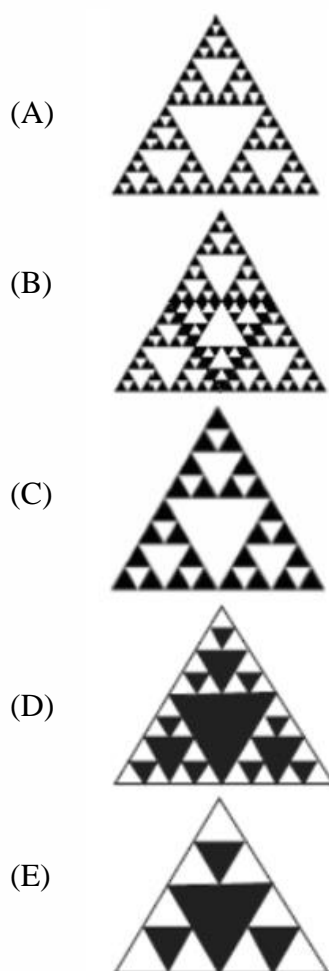
05. (ENEM-2018) Alguns modelos de rádios automotivos estão protegidos por um código de segurança. Para ativar o sistema de áudio, deve-se digitar o código secreto composto por quatro algarismos. No primeiro caso de erro na digitação, a pessoa deve esperar 60 segundos para digitar o código novamente. O tempo de espera duplica, em relação ao tempo de espera anterior, a cada digitação errada. Uma pessoa conseguiu ativar o rádio somente na quarta tentativa, sendo de 30 segundos o tempo gasto para digitação do código secreto a cada tentativa. Nos casos da digitação incorreta, ela iniciou a nova tentativa imediatamente após a liberação do sistema de espera. O tempo total, em segundo, gasto por essa pessoa para ativar o rádio foi igual a:

- (A) 300
- (B) 420
- (C) 540
- (D) 660
- (E) 1.020

06. (ENEM-2008) Fractal (do latim *fractus*, fração, quebrado) – objeto que pode ser dividido em partes que possuem semelhança com o objeto inicial. A geometria fractal, criada no século XX, estuda as propriedades e o comportamento dos fractais – objetos geométricos formados por repetições de padrões similares. O Triângulo de Sierpinski, uma das formas elementares da geometria fractal, pode ser obtido por meio dos seguintes passos: (1) Comece com um triângulo equilátero (Figura 1). (2) Construa um triângulo em que cada lado tenha a metade do tamanho do lado do triângulo anterior e faça três cópias. (3) Posicione essas cópias de maneira que cada triângulo tenha um vértice comum com um dos vértices de cada um dos outros dois triângulos, conforme ilustra a Figura 2. (4) Repita sucessivamente os passos 2 e 3 para cada cópia dos triângulos obtidos no passo 3 (Figura 3).



De acordo com o procedimento descrito, a Figura 4 da sequência apresentada anteriormente é:



GABARITO:

04 -	05 -	06 -
------	------	------

EXERCÍCIOS DE REVISÃO

01. (ENEM-2011) O número mensal de passagens de uma determinada empresa aérea aumentou no ano passado nas seguintes condições: em janeiro foram vendidas 33.000 passagens; em fevereiro, 34.500; em março, 36.000. Esse padrão de crescimento se mantém para os meses subsequentes. Quantas passagens foram vendidas por essa empresa em julho do ano passado?

- (A) 38.000
- (B) 40.500
- (C) 41.000
- (D) 42.000
- (E) 48.000

02. (ENEM-2018) A prefeitura de um pequeno município do interior decide colocar postes para iluminação ao longo de uma estrada retilínea, que inicia em uma praça central e termina numa fazenda na zona rural. Como a praça já possui iluminação, o primeiro poste será colocado a 80 metros da praça, o segundo, a 100 metros, o terceiro a 120 metros, e assim sucessivamente, mantendo-se sempre uma distância de vinte metros entre os postes, até que o último poste seja colocado a uma distância de 1.380 metros da praça. Se a prefeitura pode pagar, no máximo, R\$ 8.000,00 por poste colocado, o maior valor que poderá gastar com a colocação desses postes é:

- (A) R\$ 512.000,00
- (B) R\$ 520.000,00
- (C) R\$ 528.000,00
- (D) R\$ 552.000,00
- (E) R\$ 584.000,00

03. (ENEM-2014) Um ciclista participará de uma competição e treinará alguns dias da seguinte maneira: no primeiro dia, pedalará 60 km; no segundo dia, a mesma distância do primeiro mais r km; no terceiro dia, a mesma distância do segundo mais r km; e, assim, sucessivamente, sempre pedalando a mesma distância do dia anterior mais r km. No último dia, ele deverá percorrer 180 km, completando o treinamento com um total de 1.560 km. A distância r que o ciclista deverá pedalar a mais a cada dia, em km, é:

- (A) 3
- (B) 7
- (C) 10
- (D) 13
- (E) 20

04. (ENEM-2013) As projeções para a produção de arroz no período de 2012-2021, em uma determinada região produtora, apontam para uma perspectiva de crescimento constante da produção anual. O quadro apresenta a quantidade de arroz, em toneladas, que será produzida nos primeiros anos desse período, de acordo com essa projeção.

Ano	Projeto da Produção (t)
2012	50,25
2013	51,50
2014	52,75
2015	54,00

A quantidade total de arroz, em toneladas, que deverá ser produzida no período de 2012 a 2021 será:

- (A) 497,25
- (B) 500,85
- (C) 502,87
- (D) 558,75
- (E) 563,25

05. (ENEM-2010) Nos últimos anos, a corrida de rua cresce no Brasil. Nunca se falou tanto no assunto como hoje, e a quantidade de adeptos aumenta progressivamente, afinal, correr traz inúmeros benefícios para a saúde física e mental, além de ser um esporte que não exige um alto investimento financeiro. Um corredor estipulou um plano de treinamento diário, correndo 3 quilômetros no primeiro dia e aumentando 500 metros por dia, a partir do segundo. Contudo, seu médico cardiologista autorizou essa atividade até que o corredor atingisse, no máximo, 10 quilômetros de corrida em um mesmo dia de treino. Se o atleta cumprir a recomendação medida e praticar o treinamento estipulado corretamente em dias consecutivos, pode-se afirmar que esse planejamento de treino só poderá ser executado em, exatamente:

- (A) 12 dias
- (B) 13 dias
- (C) 14 dias
- (D) 15 dias
- (E) 16 dias

06. (ENEM-2013) Para um participante em corrida, foi estipulado o seguinte plano de treinamento diário: correr 300 metros no primeiro dia e aumentar 200 metros por dia, a partir do segundo. Para contabilizar seu rendimento, ele utilizará um *chip*, preso ao seu tênis, para medir a distância percorrida nos treinos. Considere que esse *chip* armazene, em sua memória, no máximo 9,5 km de corrida/caminhada, devendo ser colocado no momento do início do treino e descartado após esgotar o espaço para reserva de dados. Se esse atleta utilizar o *chip* desde o primeiro dia de treinamento, por quantos dias consecutivos esse *chip* poderá armazenar a quilometragem desse plano de treino diário?

- (A) 7
- (B) 8
- (C) 9
- (D) 12
- (E) 13

07. (ENEM-2013) O ciclo de atividade magnética do Sol tem um período de 11 anos. O início do primeiro ciclo registrado se deu no começo de 1755 e se estendeu até o final de 1765. Desde então, todos os ciclos de atividade magnética do Sol têm sido registrados. No ano de 2101, o Sol estará no ciclo de atividade magnética de número:

- (A) 32
- (B) 34
- (C) 33
- (D) 35
- (E) 31

08. (ENEM-2019) Após o Fórum Nacional Contra a Pirataria (FNCP) incluir a linha de autopeças em campanha veiculada contra a falsificação, as agências fiscalizadoras divulgaram que os cinco principais produtos de autopeças falsificados são: rolamento, pastilha de freio, caixa de direção, catalisador e amortecedor. Após uma grande apreensão, as peças falsas foram cadastradas utilizando-se a codificação:

1: rolamento, 2: pastilha de freio, 3: caixa de direção, 4: catalisador e 5: amortecedor.

Ao final obteve-se a sequência: 5, 4, 3, 2, 1, 2, 3, 4, 5, 4, 3, 2, 1, 2, 3, 4, 5, 4, 3, 2, 1, 2, 3, 4, ... que apresenta um padrão de formação que consiste na repetição de um bloco de números. Essa sequência descreve a ordem em que os produtos apreendidos foram cadastrados. O 2015º item cadastrado foi um(a):

- (A) rolamento
- (B) catalisador
- (C) amortecedor
- (D) pastilha de freio
- (E) caixa de direção

09. (ENEM-2016) Com o objetivo de trabalhar a concentração e a sincronia de movimentos dos alunos de uma de suas turmas, um professor de educação física dividiu essa turma em três grupos (A, B e C) e estipulou a seguinte atividade: os alunos do grupo A deveriam bater palmas a cada 2 segundos; os alunos do grupo B deveriam bater palmas a cada 3 segundos; e os alunos do grupo C deveriam bater palmas a cada 4 segundos. O professor zerou o cronômetro e os três grupos começaram a bater palmas quando ele registrou 1 segundo. Os movimentos prosseguiram até o cronômetro registrar 60 segundos. Um estagiário anotou no papel a sequência formada pelos instantes em que os três grupos bateram palmas simultaneamente. Qual é o termo geral da sequência anotada?
- (A) $12n$, com n um número natural, tal que $1 \leq n \leq 5$.
(B) $24n$, com n um número natural, tal que $1 \leq n \leq 2$.
(C) $12(n - 1)$, com n um número natural, tal que $1 \leq n \leq 6$.
(D) $12(n - 1) + 1$, com n um número natural, tal que $1 \leq n \leq 5$.
(E) $24(n - 1) + 1$, com n um número natural, tal que $1 \leq n \leq 3$.

10. (ENEM-2016) Sob a orientação de um mestre de obras, João e Pedro trabalharam na reforma de um edifício. João efetuou reparos na parte hidráulica nos andares 1, 3, 5, 7, e assim sucessivamente, de dois em dois andares. Pedro trabalhou na parte elétrica nos andares 1, 4, 7, 10, e assim sucessivamente, de três em três andares. Coincidentemente, terminaram seus trabalhos no último andar. Na conclusão da reforma, o mestre de obras informou, em seu relatório, o número de andares do edifício. Sabe-se que, ao longo da execução da obra, em exatamente 20 andares, foram realizados reparos nas partes hidráulica e elétrica por João e Pedro. Qual é o número de andares desse edifício?
- (A) 40
(B) 60
(C) 100
(D) 115
(E) 120

11. (ENEM-2012) Jogar baralho é uma atividade que estimula o raciocínio. Um jogo tradicional é a Paciência, que utiliza 52 cartas. Inicialmente são formadas sete colunas com as cartas. A primeira coluna tem uma carta, a segunda tem duas cartas, a terceira tem três cartas, a quarta tem quatro cartas, e assim sucessivamente até a sétima coluna, a qual tem sete cartas, e o que sobra forma o monte, que são as cartas não utilizadas nas colunas. A quantidade de cartas que forma o monte é:
- (A) 21
(B) 24
(C) 26
(D) 28
(E) 31

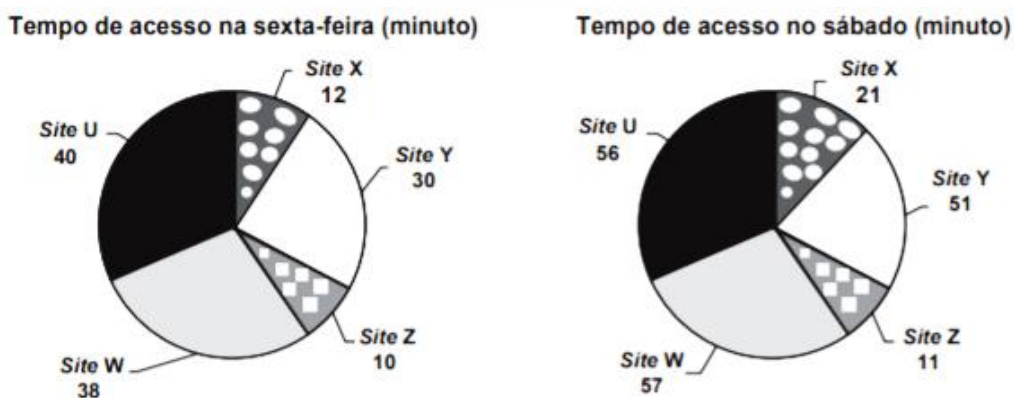
12. (ENEM-2014) A taxa de fecundidade é um indicador que expressa a condição reprodutiva média das mulheres de uma região, e é importante para uma análise da dinâmica demográfica dessa região. A tabela apresenta os dados obtidos pelos Censos de 2000 e 2010, feitos pelo IBGE, com relação à taxa de fecundidade no Brasil.

Ano	Taxa de fecundidade no Brasil
2000	2,38
2010	1,90

Suponha que a variação percentual relativa na taxa de fecundidade no período de 2000 a 2010 se repita no período de 2010 a 2020. Nesse caso, em 2020 a taxa de fecundidade no Brasil estará mais próxima de:

- (A) 1,14
- (B) 1,42
- (C) 1,52
- (D) 1,70
- (E) 1,80

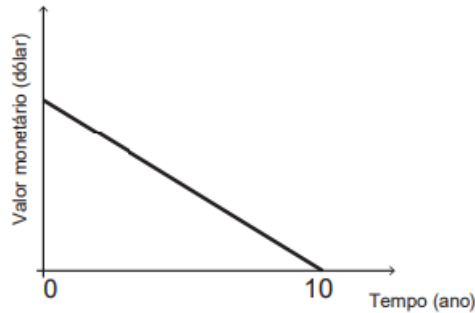
13. (ENEM-2017) Quanto tempo você fica conectado à internet? Para responder a essa pergunta foi criado um mini aplicativo de computador que roda na área de trabalho, para gerar automaticamente um gráfico de setores, mapeando o tempo que uma pessoa acessa cinco *sites* visitados. Em um computador, foi observado que houve um aumento significativo do tempo de acesso da sexta-feira para o sábado, nos cinco *sites* mais acessados. A seguir, temos os dados do mini aplicativo para esses dias.



Analisando os gráficos do computador, a maior taxa de aumento no tempo de acesso, da sexta-feira para o sábado, foi no *site*

- (A) X
- (B) Y
- (C) Z
- (D) W
- (E) U

14. (ENEM-2017) Um sistema de depreciação linear, estabelecendo que após 10 anos o valor monetário de um bem será zero, é usado nas declarações de imposto de renda de alguns países. O gráfico ilustra essa situação.



Uma pessoa adquiriu dois bens A e B, pagando 1 200 e 900 dólares, respectivamente. Considerando as informações dadas, após 8 anos, qual será a diferença entre os valores monetários, em dólar, desses bens?

- (A) 30
- (B) 60
- (C) 75
- (D) 240
- (E) 300

GABARITO:

01 - D	02 - C	03 - C	04 - D	05 - D	06 - B	07 - A
08 - E	09 - D	10 - D	11 - B	12 - C	13 - A	14 - C